Karl Bosch

Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

9., durchgesehene Auflage

Mit 82 Beispielen
und 73 Übungsaufgaben
mit vollständigem Lösungsweg

vieweg

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Prof. Dr. Karl Bosch
Universität Hohenheim
Institut für Angewandte Mathematik und Statistik
70593 Stuttgart
bosch@uni-hohenheim.de

1. Auflage 1976
2., durchgesehene Auflage 1979
3., durchgesehene Auflage 1982
4., durchgesehene Auflage 1984
5., durchgesehene Auflage 1986
6., durchgesehene Auflage 1995
7., durchgesehene Auflage 1999
8., korrigierte Auflage Oktober 2003
9., durchgesehene Auflage April 2006

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Petra Rußkamp

Der Vieweg Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media.
www.vieweg.de

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de
Druck und buchbinderische Verarbeitung: MercedesDruck, Berlin
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier
Printed in Germany

ISBN-10 3-8348-0092-9
ISBN-13 978-3-8348-0092-3

Vorwort zur ersten Auflage 1976

Dieser Band ist aus dem ersten Teil einer zweisemestrigen Vorlesung entstanden, die der Autor wiederholt für Studenten der Fachrichtungen Biologie, Pädagogik, Psychologie und Betriebs- und Wirtschaftswissenschaften an der Technischen Universität Braunschweig gehalten hat. In ihm sollen möglichst anschaulich die wichtigsten Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung eingeführt werden, die für ein sinnvolles Studium der Statistik unentbehrlich sind.

Da die Statistik bei immer mehr Wissenschaftszweigen benötigt wird, ist der Aufbau und die Darstellung so gewählt, daß ein möglichst breiter Leserkreis angesprochen werden kann. So wird bei den Zufallsvariablen zunächst der „diskrete" Fall behandelt, weil zu deren Verständnis nur wenig mathematische Vorkenntnisse benötigt werden. Erst anschließend werden „stetige" Zufallsvariable betrachtet. Häufig werden neue Begriffe über ein Beispiel anschaulich eingeführt, bevor sie allgemein definiert werden. Zahlreiche Beispiele und Übungsaufgaben, deren Lösungswege im Anhang vollständig angegeben werden, sollen zum besseren Verständnis beitragen.

Die mit * versehenen Stellen erfordern einige mathematische Vorkenntnisse. Sie können jedoch überlesen werden, ohne daß dadurch eine Lücke entsteht. Entsprechend sind etwas schwierige Übungsaufgaben mit einem * gekennzeichnet. Das Ende eines Beweises wird mit dem Zeichen ■, das Ende eines Beispiels mit ♦ gekennzeichnet.

Auf Mengensysteme und auf den Begriff der Meßbarkeit soll in diesem Rahmen nicht eingegangen werden. Dazu sei auf die weiterführende Literatur verwiesen.

Als Fortsetzung dieses Bandes ist die Angewandte Mathematische Statistik gedacht.

Das Manuskript wurde von Herrn Prof. Dr. E. Henze und Herrn Akad. Direktor Dr. H. Wolff durchgesehen. Beiden bin ich für wertvolle Hinweise und Ratschläge sowie für das Überlassen zahlreicher Übungsaufgaben zu großem Dank verpflichtet. Den Herren Kruse, Möller, Scholz und Stegen danke ich für die Mithilfe beim Korrekturenlesen.

Schließlich sei dem Verlag für die vorbildliche Zusammenarbeit gedankt. In einer sehr kurzen Zeit wurde dieser Band in einer ansprechenden Form von ihm herausgebracht. Jedem Leser bin ich für Verbesserungsvorschläge dankbar.

Braunschweig, im Januar 1976 *Karl Bosch*

Vorwort zur achten und neunten Auflage

Wegen des erfolgreichen Einsatzes des Buches in zahlreichen Lehrveranstaltungen wurde bei den Neuauflagen die Grundkonzeption des Buches nicht verändert. Neben der Beseitigung von Fehlern im Text und in den Aufgaben wurde das Literaturverzeichnis aktualisiert. Für die Lösung der Aufgabe 3 aus Abschnitt 2.3.6 wurde von einem Leser ein für die Praxis geeignetes Modell vorgeschlagen. Die geänderte Lösung wurde nach diesem Modell berechnet. Den Kolleginnen und Kollegen und Studierenden, die mich auf Fehler aufmerksam gemacht haben, danke ich recht herzlich.

Stuttgart-Hohenheim, im April 2006 *Karl Bosch*

Inhalt

1. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff

Bevor wir den Begriff „Wahrscheinlichkeit" einführen, beschäftigen wir uns mit den Grundbausteinen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, den sogenannten zufälligen Ereignissen.

1.1. Zufällige Ereignisse

Bei der Durchführung vieler Experimente kann eines von mehreren möglichen Ergebnissen eintreten. Dabei sind zwar die verschiedenen Ergebnisse, die eintreten können, bekannt, vor der Durchführung des Experiments weiß man jedoch nicht, welches Ergebnis tatsächlich eintreten wird. In einem solchen Fall sagt man, das Ergebnis hängt vom Zufall ab. Experimente dieser Art nennen wir *Zufallsexperimente.*

Beispiele von Zufallsexperimenten sind: das Werfen einer Münze oder eines Würfels, das Verteilen der 32 Skatkarten, die Lotto-Ausspielung, das Messen der Körpergröße, des Blutdrucks und des Gewichts einer zufällig ausgewählten Person oder die Feststellung des Intelligenzquotienten eines Kindes.

Unter einem *zufälligen Ereignis* (oder kurz *Ereignis*) verstehen wir einen Versuchsausgang, der bei der Durchführung eines Zufallsexperiments eintreten kann, aber nicht unbedingt eintreten muß. Dabei muß von einem Ereignis nach jeder Versuchsdurchführung feststellbar sein, ob es eingetreten ist oder nicht. Ereignisse, die stets gemeinsam eintreten oder nicht eintreten, werden als gleich angesehen. Wir bezeichnen Ereignisse mit großen lateinischen Buchstaben $A, B, C, D, E, \ldots; A_1, A_2, \ldots$

Das Ereignis, das bei jeder Durchführung des Zufallsexperiments eintritt, nennen wir das *sichere Ereignis* und bezeichnen es mit Ω. Das sichere Ereignis Ω besteht somit aus allen möglichen Versuchsergebnissen. Ein Ereignis, das nie eintreten kann, heißt *unmögliches Ereignis* und wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

Beispiel 1.1. Beim Werfen eines Würfels können als mögliche Versuchsergebnisse die Augenzahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6$ eintreten. Es gilt also $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ist G das Ereignis „eine gerade Augenzahl wird geworfen", so tritt G genau dann ein, wenn eine der Augenzahlen $2, 4, 6$ geworfen wird, es gilt also $G = \{2, 4, 6\}$.
Das Ereignis U „eine ungerade Augenzahl wird geworfen" besitzt die Darstellung $U = \{1, 3, 5\}$ und für das Ereignis A „die geworfene Augenzahl ist mindestens gleich vier" erhält man $A = \{4, 5, 6\}$. Jede Zusammenfassung von Versuchsergebnissen stellt ein Ereignis dar. Unmögliche Ereignisse sind hier z.B.
$\{x/x = 7\} = \emptyset$; $\{x/x = 0\} = \emptyset$; $\{x/x = 15 \text{ oder } x = 16\} = \emptyset$. ♦

Beispiel 1.2. Ein Ball werde auf eine rechteckige Wand geworfen. Dabei sei die Wand und der Standort des Werfers so gewählt, daß dieser bei jedem Wurf sicher

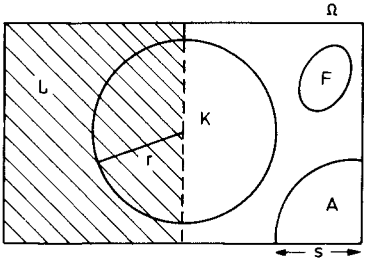

Bild 1.1. Ereignisse

trifft. Versuchsergebnisse sind dann die Berührungspunkte des Balles mit der Wand, die wir (Bild 1.1) symbolisch als Punkte eines Rechtecks darstellen können. Ω besteht somit aus allen Punkten des eingezeichneten Rechtecks. Beträgt der Abstand des Berührungspunktes vom Mittelpunkt der Wand höchstens r Einheiten, so tritt das Ereignis K ein. Das Ereignis L tritt ein, wenn die linke Hälfte der Wand getroffen wird, und das Ereignis A, wenn der Abstand des Berührungspunktes vom rechten unteren Eckpunkt der Wand höchstens s Einheiten beträgt. Jeder Figur (z.B. F) kann ein Ereignis zugeordnet werden. ♦

Aus den Ereignissen A, B gewinnen wir neue Ereignisse durch folgende Vorschriften:

1. Das Ereignis $A \cap B = AB$ (sprich „A und B") tritt genau dann ein, wenn sowohl A als auch B, wenn also beide eintreten. Man nennt $A \cap B$ den *Durchschnitt* oder das *Produkt* von A und B.
2. Das Ereignis $A \cup B$ (sprich „A oder B") tritt genau dann ein, wenn A oder B oder beide eintreten, wenn also mindestens eines der Ereignisse A, B eintritt. $A \cup B$ heißt die *Vereinigung* von A und B.
3. Das Ereignis $\bar{A}$ (sprich „A nicht") tritt genau dann ein, wenn das Ereignis A nicht eintritt. Man nennt $\bar{A}$ das zu A *entgegengesetzte* Ereignis oder das *Komplementärereignis* von A.
4. Das Ereignis $A \setminus B = A\bar{B}$ tritt genau dann ein, wenn A eintritt und B nicht. $A \setminus B$ heißt die *Differenz* von A und B.

Spätere wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen werden durch folgende Verabredungen wesentlich erleichtert:

5. Man sagt: A *zieht* B *nach sich* oder *aus* A *folgt* B, im Zeichen $A \subset B$, wenn aus dem Eintreten des Ereignisses A auch das von B folgt. Gilt $A \subset B$ und $B \subset A$, so sind die Ereignisse A und B *gleich*, d.h. $A = B$.
6. Zwei Ereignisse A und B heißen *unvereinbar* (oder *unverträglich* oder *disjunkt*), wenn sie nicht beide gleichzeitig eintreten können, wenn also gilt $A \cap B = \emptyset$.

Für unvereinbare Ereignisse A, B schreibt man anstelle von $A \cup B$ auch $A + B$ und nennt $A + B$ die *Summe* von A und B.

Die Schreibweise $C = A + B$ bedeutet also folgendes: die beiden Ereignisse A und B sind unvereinbar und C ist die Vereinigung von A und B.

Ein Ereignis, das nicht als Summe zweier disjunkter, von $\emptyset$ verschiedenen Ereignisse darstellbar ist, heißt *Elementarereignis*. Elementarereignisse lassen sich also nicht mehr zerlegen.

Beispiel 1.3 (vgl. Beispiel 1.1). Beim Werfen eines Würfels seien folgende Ereignisse betrachtet

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad G = \{2, 4, 6\}, \quad U = \{1, 3, 5\}, \quad M = \{4, 5, 6\},$$
$$A = \{2, 3, 4\}, \quad B = \{2, 4, 5\}, \quad C = \{2, 4\}.$$

Das Ereignis AB tritt ein, wenn entweder eine 2 oder eine 4 geworfen wird. Der Durchschnitt AB besteht also aus allen Augenzahlen, die sowohl in A als auch in B enthalten sind; damit gilt $AB = \{2, 4\}$. Ferner erhalten wir $G \cap U = \emptyset$ und $U \cap M = \{5\}$. Die Vereinigung $A \cup B$ besteht aus allen Zahlen, die in A oder B oder in beiden enthalten sind, es ist also $A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$.

Weiter gilt

$$\overline{A} = \{1, 5, 6\}, \quad \overline{G} = \{1, 3, 5\} = U, \quad \overline{U} = \{2, 4, 6\} = G,$$
$$\overline{M} = \{1, 2, 3\}, \quad \Omega = G + U,$$
$$A \setminus B = A\overline{B} = \{2, 3, 4\} \cap \{1, 3, 6\} = \{3\},$$
$$C \subset G.$$

Die Beziehung $B \subset G$ gilt nicht, wir schreiben dafür $B \not\subset G$.
Die sechs Elementarereignisse lauten: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$. ♦

Beispiel 1.4. Das Zufallsexperiment bestehe im Messen der Körpergröße einer zufällig ausgewählten Person. Als Versuchsergebnis tritt eine Zahl x auf, welche die Körpergröße der gemessenen Person angibt. Ist A das Ereignis „die Körpergröße beträgt mindestens 165 und höchstens 175 cm", so besteht A aus allen reellen Zahlen x mit $165 \le x \le 175$. Das Ereignis A können wir somit darstellen als $A = \{x \mid 165 \le x \le 175\}$. Ferner betrachten wir die Ereignisse $B = \{x \mid 170 \le x \le 180\}$ und $C = \{x \mid 150 \le x \le 160\}$.

Damit erhalten wir

$$A \cap B = \{x \mid 170 \le x \le 175\},$$
$$A \cup B = \{x \mid 165 \le x \le 180\},$$
$$A \cap C = \emptyset.$$

Das Ereignis $\overline{A}$ tritt ein, wenn die Körpergröße kleiner als 165 oder größer als 175 ist. $\overline{A}$ besteht also aus allen Werten x mit $x < 165$ oder $x > 175$, es gilt also $\overline{A} = \{x \mid x < 165\} \cup \{x \mid x > 175\}$. ♦

Beispiel 1.5 (vgl. Beispiel 1.2 und Bild 1.2)

A = „Kreisfläche";
B = „Rechtecksfläche";
C = „Dreiecksfläche";
AB = „schraffierte Fläche";
$AC = BC = \emptyset$;

$A \cup B$ = „stark umrandete Fläche";
$A \setminus B$ = „nichtschraffierte Teilfläche des Kreises";
$B \setminus A$ = „nichtschraffierte Teilfläche des Rechtecks".

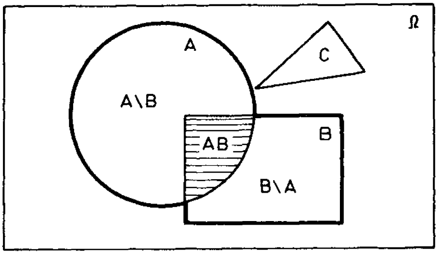

Bild 1.2. Ereignisse

Aus dem Bild 1.2 erkennt man die Identität

$$A \cup B = AB + A\bar{B} + \bar{A}B\,.$$ ♦

Die Operationen $\cap$ und $\cup$ können unmittelbar auf mehrere Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ übertragen werden.

7. Das Ereignis $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ tritt genau dann ein, wenn alle Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eintreten. Das Ereignis $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ tritt genau dann ein, wenn mindestens eines der Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eintritt.

In den bisher betrachteten Beispielen haben wir Ereignisse stets durch Teilmengen $A, B, \ldots$ einer Grundmenge Ω dargestellt. Ferner benutzten wir bei der Definition der Ereignisoperationen die Symbole der Mengenoperationen. Man wird daher vermuten, daß zwischen zufälligen Ereignissen dieselben Beziehungen bestehen wie zwischen Mengen. Tatsächlich kann man sämtliche Eigenschaften, die für Mengen gelten, direkt auf zufällige Ereignisse übertragen, wenn man die Grundmenge durch das sichere Ereignis Ω und die leere Menge durch das unmögliche Ereignis $\emptyset$ ersetzt. Dabei können sämtliche Gesetze direkt in der Sprache der Ereignisse bewiesen werden, wobei viele Eigenschaften unmittelbar einleuchtend sind.

Als Beispiel zeigen wir die sog. *De Morganschen Regeln*.

Es gilt

$$\left.\begin{aligned}\overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B},\\ \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B}\end{aligned}\right\} \quad \text{für alle Ereignisse } A, B. \tag{1.1}$$

Das Ereignis $\overline{A \cup B}$ tritt nach Definition genau dann ein, wenn das Ereignis $A \cup B$ nicht eintritt, wenn also weder A noch B, d.h. wenn $\overline{A}$ und $\overline{B}$ eintreten.

Das Ereignis $\overline{A \cap B}$ tritt genau dann ein, wenn das Ereignis $A \cap B$ nicht eintritt, wenn also von den Ereignissen A und B nicht beide eintreten. Diese Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn mindestens eines der Ereignisse A, B nicht eintritt, wenn also $\overline{A} \cup \overline{B}$ eintritt, womit (1.1) bewiesen ist.

Als nächstes zeigen wir für beliebige Ereignisse A und B die Identität

$$A \cup B = AB + \overline{A}B + A\overline{B}, \tag{1.2}$$

die wir in Beispiel 1.5 für zwei spezielle Ereignisse A, B aus Bild 1.2 direkt abgelesen haben. Das Ereignis $A \cup B$ tritt genau dann ein, wenn mindestens eines der Ereignisse A, B eintritt. Dies ist genau dann der Fall, wenn entweder beide Ereignisse (d.h. das Ereignis AB), oder nur B (also $\overline{A}B$) oder nur A (d.h. $A\overline{B}$) eintritt. Ferner sind die drei Ereignisse AB, $\overline{A}B$, $A\overline{B}$ paarweise unvereinbar, d.h. je zwei von ihnen können zusammen nicht eintreten, woraus (1.2) folgt.

Abschließend geben wir einige Rechengesetze an, die sich in der Sprache der Ereignisse sehr einfach beweisen lassen.

$$\left.\begin{aligned}A \cap B &= B \cap A,\\ A \cup B &= B \cup A,\end{aligned}\right. \quad \text{(Kommutativgesetze)}$$

$$\left.\begin{aligned}A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C,\\ A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C,\end{aligned}\right. \quad \text{(Assoziativgesetze)}$$

$$A \cap (B \cup C) = AB \cup AC, \quad \text{(Distributivgesetz)}$$

$$A\Omega = A,$$

$$A \cap A = A,$$

$$\overline{\overline{A}} = A,$$

$$\overline{\Omega} = \emptyset, \quad \overline{\emptyset} = \Omega,$$

$$A(B \setminus C) = AB \setminus AC,$$

$$A \cup \overline{A} = \Omega.$$

1.2. Die relative Häufigkeit

Beispiel 1.6. Wir wählen zufällig 10 Personen aus und bestimmen deren Körpergrößen. Wir führen also das in Beispiel 1.4 beschriebene Zufallsexperiment 10-mal durch. Dabei ergeben sich folgende auf cm gerundete Meßwerte:

172, 169, 178, 183, 175, 159, 170, 187, 174, 173 .

Bei jedem Versuch können wir dann feststellen, ob die in Beispiel 1.4 angegebenen Ereignisse $A = \{x \mid 165 \leq x \leq 175\}$, $B = \{x \mid 170 \leq x \leq 180\}$, $C = \{x \mid 150 \leq x \leq 160\}$ eingetreten sind. Beim ersten Versuch sind z.B. A und B eingetreten, C dagegen nicht; somit ist $\bar{C}$ eingetreten. Insgesamt erhalten wir folgende Serien

$A = \{x \mid 165 \leq x \leq 175\}$	A	A	$\bar{A}$	$\bar{A}$	A	$\bar{A}$	A	$\bar{A}$	A	A
$B = \{x \mid 170 \leq x \leq 180\}$	B	$\bar{B}$	B	$\bar{B}$	B	$\bar{B}$	B	$\bar{B}$	B	B
$C = \{x \mid 150 \leq x \leq 160\}$	$\bar{C}$	$\bar{C}$	$\bar{C}$	$\bar{C}$	$\bar{C}$	C	$\bar{C}$	$\bar{C}$	$\bar{C}$	$\bar{C}$

♦

Allgemein werde ein Zufallsexperiment n-mal unter denselben Bedingungen durchgeführt, wobei n eine bestimmte natürliche Zahl ist. Ist A ein beliebiges zufälliges Ereignis, so tritt bei jeder Versuchsdurchführung entweder A oder das komplementäre Ereignis $\bar{A}$ ein. Die Anzahl der Versuche, bei denen A eintritt, heißt *absolute Häufigkeit* des Ereignisses A; wir bezeichnen sie mit $h_n(A)$. Der Quotient

$r_n(A) = \frac{h_n(A)}{n}$ heißt *relative Häufigkeit* von A.

Die relative Häufigkeit hängt als Ergebnis eines Zufallsexperiments selbst vom Zufall ab. Verschiedene Versuchsserien vom gleichen Umfang n werden daher im allgemeinen verschiedene relative Häufigkeiten liefern. Trotzdem wird man erwarten, daß die Werte $r_n(A)$ in der unmittelbaren Nähe eines festen Wertes liegen, falls n nur hinreichend groß gewählt wird. Betrachten wir dazu folgendes

Beispiel 1.7. W sei das Ereignis, daß beim Werfen einer Münze Wappen auftritt. Eine Münze werde 1000-mal geworfen. Berechnet man nach jedem Versuchsschritt die durch die bisherige Versuchsserie bestimmte relative Häufigkeit des Ereignisses W, so erhält man 1000 Zahlenwerte $r_n(W)$, $n = 1, 2, \ldots, 1000$, die für $n \geq 100$ auf dem Graphen der in Bild 1.3 eingezeichneten Kurve liegen.

Für große n liegt $r_n(W)$ sehr nahe bei $\frac{1}{2}$. ♦

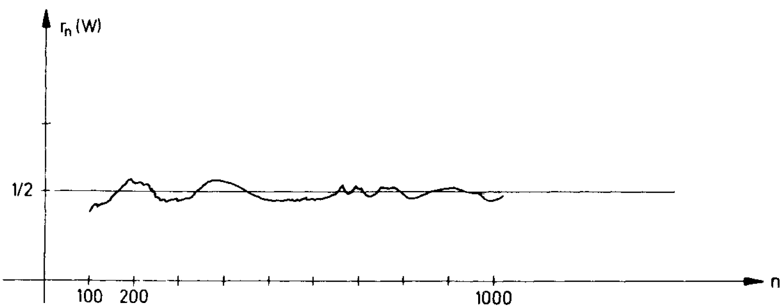

Bild 1.3. Relative Häufigkeiten

Eine solche Stabilität zeigen i. A. die relativen Häufigkeiten eines beliebigen Ereignisses A. Daher hat *Richard von Mises* (1931) versucht, die Wahrscheinlichkeit P(A) eines Ereignisses zu definieren durch einen Zahlenwert, dem sich die relativen Häufigkeiten $r_n(A)$ beliebig nähern, wenn nur n genügend groß ist. Dieser Zahlenwert heißt der *Grenzwert* der Folge $r_n(A)$. Man bezeichnet ihn mit

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} r_n(A).$$

Gegen diese Definition, die man übrigens noch in einigen in letzter Zeit erschienenen Büchern finden kann, ist folgendes einzuwenden:

Wird das Zufallsexperiment sehr oft wiederholt, so können sich im Laufe der Zeit die Versuchsbedingungen ändern. Bei einem Würfel könnten z. B. Abnutzungserscheinungen auftreten.

Auch wenn man die Versuchsbedingungen konstant halten könnte, so würde die Existenz des Grenzwertes doch bedeuten, daß zu jeder noch so kleinen Zahl $\epsilon > 0$ ein Index $n_0(\epsilon)$ existiert, so daß sich für alle $n \geq n_0(\epsilon)$ die relativen Häufigkeiten $r_n(A)$ vom Grenzwert P(A) um höchstens ϵ unterscheiden. Daher müßte die Ungleichung

$$P(A) - \epsilon \leq r_n(A) \leq P(A) + \epsilon \qquad \text{für alle } n \geq n_0(\epsilon) \tag{1.3}$$

gelten. Es können jedoch Versuchsreihen entstehen, für die (1.3) nicht gilt, auch wenn n_0 noch so groß gewählt wird. So kann mit der in Beispiel 1.7 benutzten Münze durchaus einmal eine Serie auftreten, in der die relativen Häufigkeiten nicht in der Nähe von $\frac{1}{2}$ liegen, auch wenn n noch so groß ist, z. B. eine Serie, bei der es immer wieder ein n mit $r_n(W) \geq 0{,}55$ gibt. Allerdings werden solche Serien bei großen n höchst selten vorkommen. Der Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} r_n(A)$ muß also nicht existieren.

Wir müssen daher versuchen, die Wahrscheinlichkeiten auf eine andere Art einzuführen. Da die relativen Häufigkeiten $r_n(A)$ mit den Wahrscheinlichkeiten P(A) doch in einer gewissen Beziehung stehen müssen, leiten wir einige Eigenschaften für die relativen Häufigkeiten ab. Diese Eigenschaften benutzen wir dann zur axiomatischen Definition der Wahrscheinlichkeit. Mit diesen Axiomen entwickeln wir dann eine Theorie, mit der wir schließlich im sog. Bernoullischen Gesetz der großen Zahlen (s. Abschnitt 1.9) zeigen werden, daß unter gewissen Voraussetzungen für jedes $\epsilon > 0$ Versuchsserien mit $|r_n(A) - P(A)| > \epsilon$ bei wachsendem n immer seltener auftreten, daß also (1.3) mit wachsendem n_0 immer häufiger erfüllt ist.

Eigenschaften der relativen Häufigkeit:

Aus $0 \leq h_n(A) \leq n$ folgt nach Division durch n

$$0 \leq r_n(A) \leq 1 \qquad \text{für jedes } A. \tag{1.4}$$

Da das sichere Ereignis Ω immer eintritt, gilt

$$r_n(\Omega) = 1. \tag{1.5}$$

Sind A und B zwei unverträgliche Ereignisse, so können bei einer speziellen Versuchsdurchführung nicht beide Ereignisse zugleich, sondern jeweils höchstens eines davon eintreten. Damit gilt für die absoluten Häufigkeiten

$$h_n(A+B) = h_n(A) + h_n(B).$$

Division durch n liefert hieraus die Gleichung

$$r_n(A+B) = r_n(A) + r_n(B). \tag{1.6}$$

Sind die Ereignisse A, B nicht unverträglich, so können bei einer Versuchsdurchführung die Ereignisse A und B gleichzeitig eintreten. Dann sind in der Summe $h_n(A) + h_n(B)$ diejenigen Versuche, bei denen der Durchschnitt $A \cap B$ eintritt, doppelt gezählt, während diese Versuche in $h_n(A \cup B)$ nur einfach mitgezählt werden.

Daraus folgt

$$h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B) - h_n(AB).$$

Division durch n liefert die Gleichung

$$r_n(A \cup B) = r_n(A) + r_n(B) - r_n(AB). \tag{1.7}$$

1.3. Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit nach Kolmogoroff

Fragt man jemanden, der sich nicht intensiv mit Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt hat, was Wahrscheinlichkeit wirklich bedeutet, so bekommt man Antworten folgender Art: „Ereignisse, die eine große Wahrscheinlichkeit besitzen, treten häufig ein, Ereignisse mit einer kleinen Wahrscheinlichkeit dagegen selten." Oder „Besitzt das Ereignis A eine größere Wahrscheinlichkeit als B, so hat A eine größere Chance, einzutreten als B". Die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A wird meistens als Maß für das Eintreten des Ereignisses A betrachtet, wobei dieses Maß durch einige Eigenschaften erklärt wird, die es offensichtlich erfüllt.

Ähnliche Antworten erhält man auf die Frage nach den Grundbegriffen der Geometrie: Punkt, Gerade und Ebene. Dort ist es nicht möglich, die entsprechenden Begriffe direkt zu definieren. Zu ihrer Definition benutzt man daher wesentliche Beziehungen zwischen diesen Elementen, sogenannte Axiome. Als Beispiel sei das Axiom „durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade" genannt. *Kolmogoroff* führte 1933 den Wahrscheinlichkeitsbegriff axiomatisch ein. Es genügt bereits, die in (1.4), (1.5) und (1.6) für die relativen Häufigkeiten abgeleiteten Eigenschaften als Axiome zu postulieren. Aus diesen Axiomen können dann viele weitere Eigenschaften direkt gefolgert werden.

Definition 1.1 (Kolmogoroff). Eine auf einem System von Ereignissen definierte Funktion P heißt *Wahrscheinlichkeit*, wenn sie folgende Axiome erfüllt:

Axiom I: Die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A ist eine eindeutig bestimmte, nichtnegative reelle Zahl, die höchstens gleich Eins sein kann, d.h. es gilt

$$0 \le P(A) \le 1 .$$

Axiom II: Das sichere Ereignis besitzt die Wahrscheinlichkeit Eins,

$$P(\Omega) = 1 .$$

Axiom III: Für zwei unverträgliche Ereignisse A, B (also mit $A \cap B = \emptyset$) gilt

$$P(A + B) = P(A) + P(B) .$$

Aus diesen Axiomen lassen sich eine Reihe wichtiger Eigenschaften ableiten, die uns später bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten sehr nützlich sein werden.

Folgerungen aus den Axiomen:

Satz 1.1
Für jedes Ereignis A gilt $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Beweis: Wegen $\Omega = A + \bar{A}$ folgen aus den Axiomen die Gleichungen $1 = P(\Omega) = P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$ und hieraus die Behauptung $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. ■

Setzt man A gleich Ω, so folgt aus Satz 1.1 unmittelbar der

Satz 1.2
Das unmögliche Ereignis $\emptyset$ besitzt die Wahrscheinlichkeit Null, es gilt $P(\emptyset) = 0$.

Satz 1.3
Aus $A \subset B$ folgt $P(A) \le P(B)$.

Beweis: Wegen $A \subset B$ gilt $AB = A$. Damit erhalten wir
$B = \Omega B = (A + \bar{A})B = AB + \bar{A}B = A + \bar{A}B$ und $P(B) = P(A) + P(\bar{A}B)$.
Wegen $P(\bar{A}B) \ge 0$ folgt hieraus schließlich $P(B) \ge P(A)$. ■

Satz 1.4
Für beliebige Ereignisse A und B gilt $P(B \setminus A) = P(B\bar{A}) = P(B) - P(BA)$.

Beweis: Aus $B = BA + B\bar{A} = BA + B \setminus A$ folgt $P(B) = P(BA) + P(B \setminus A)$ und hieraus die Behauptung $P(B \setminus A) = P(B) - P(BA)$. ■

Satz 1.5
Für beliebige Ereignisse A und B gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Beweis: Aus $A \cup B = AB + A\bar{B} + \bar{A}B$ (s. (1.2)) folgt

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(AB) + P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = P(A(\bar{B} + B)) + P(\bar{A}B) = \\ &= P(A\Omega) + P(\bar{A}B) = P(A) + P(\bar{A}B) . \end{aligned} \tag{1.8}$$

Aus $B = AB + \bar{A}B$ erhält man $P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B)$ oder $P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB)$.

Mit dieser Identität folgt aus (1.8) unmittelbar die Behauptung. ■

Definition 1.2. Die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$ heißen *paarweise unvereinbar,* wenn jeweils zwei von ihnen nicht zugleich eintreten können, wenn also gilt $A_i A_k = \emptyset$ für alle $i \neq k$. Die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ heißen *(vollständig) unvereinbar*, wenn alle Ereignisse nicht zugleich eintreten können, d.h. wenn $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \emptyset$ gilt.

Sind die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ paarweise unvereinbar, so sind sie auch (vollständig) unvereinbar. Die Umkehrung braucht nicht zu gelten, wie man aus Bild 1.4 sieht. Die Ereignisse A_1, A_2, A_3 können nicht zusammen eintreten. Wegen $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$ sind die Ereignisse A_1, A_2, A_3 (vollständig) unvereinbar.

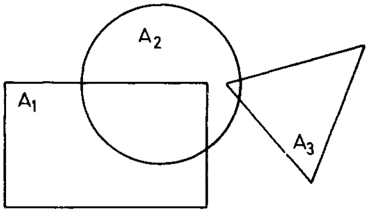

Bild 1.4. Ereignisse

Wegen $A_1 A_2 \neq \emptyset$ sind die Ereignisse A_1, A_2, A_3 dagegen nicht paarweise unvereinbar.

Sind die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ paarweise unvereinbar, so schreiben wir anstelle der Vereinigung wieder die Summe:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n.$$

Mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion läßt sich Axiom III auf die Vereinigung endlich vieler paarweise disjunkter Ereignisse übertragen. Es gilt also der

Satz 1.6
Sind die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ paarweise unvereinbar, so gilt
$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$.

***Bemerkung**: Die Vereinigungsbildung kann unmittelbar auf abzählbar unendlich viele Ereignisse $A_1, A_2, A_3, \ldots$ übertragen werden.

Das Ereignis $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ tritt genau dann ein, wenn mindestens eines der Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ eintritt.

Bei Systemen, die abzählbar unendlich viele Ereignisse enthalten, muß Axiom III ersetzt werden durch das

Axiom III': Sind $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar unendlich viele, paarweise unvereinbare Ereignisse, so gilt

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1 + A_2 + \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Bei vielen Zufallsexperimenten sind nur endlich viele verschiedene Versuchsergebnisse möglich. Bezeichnen wir die einzelnen Versuchsergebnisse mit $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$, so läßt sich das sichere Ereignis, das ja aus allen möglichen Versuchsergebnissen besteht, darstellen durch

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}. \tag{1.9}$$

Die Elementarereignisse $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots, \{\omega_m\}$ – dafür schreiben wir auch $\{\omega_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ – sollen die Wahrscheinlichkeiten $P(\{\omega_1\}) = p_1$, $P(\{\omega_2\}) = p_2, \ldots, P(\{\omega_m\}) = p_m$ besitzen. Wegen Axiom I erfüllen die Wahrscheinlichkeiten p_i die Bedingung

$$0 \leq p_i \leq 1 \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.10}$$

Aus $\Omega = \{\omega_1\} + \{\omega_2\} + \ldots + \{\omega_m\}$ folgt wegen Axiom II und Satz 1.6

$$1 = p_1 + p_2 + \ldots + p_m = \sum_{i=1}^{m} p_i. \tag{1.11}$$

Da Ω nur endlich viele Elemente besitzt, nennen wir Ω selbst *endlich*. Jedes zufällige Ereignis A läßt sich als Zusammenfassung von bestimmten Versuchsergebnissen darstellen, z.B. $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_r}\}$. A ist also eine sogenannte Teilmenge von Ω. Aus $A = \{\omega_{i_1}\} + \{\omega_{i_2}\} + \ldots + \{\omega_{i_r}\}$ folgt

$$P(A) = P(\{\omega_{i_1}\}) + \ldots + P(\{\omega_{i_r}\}) = p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_r}. \tag{1.12}$$

Die Wahrscheinlichkeit von A ist also gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten derjenigen Elementarereignisse, deren Vereinigung A ist. Bei endlichem Ω ist wegen (1.12) die Wahrscheinlichkeit für jedes Ereignis A durch die Wahrscheinlichkeiten p_i der Elementarereignisse $\{\omega_i\}$ eindeutig bestimmt.

Beispiel 1.8. Durch $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $p_1 = P(\{1\}) = 0{,}1$; $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0{,}15$; $p_6 = P(\{6\}) = 0{,}3$ könnte in einem mathematischen Modell z.B. das Zufallsexperiment beschrieben werden, das im Werfen eines „verfälschten" Würfels besteht. Der entsprechende verfälschte Würfel kann so konstruiert sein, daß in einen Holzwürfel (s. Bild 1.5) an der Seite, auf welcher die Augenzahl 1 steht, eine Stahlplatte eingearbeitet ist. Dabei sei die Stahlplatte gerade so dick, daß die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der einzelnen Augenzahlen gleich den oben angegebenen Zahlenwerten sind. Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten p_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$ hängen natürlich von der Dicke der eingearbeiteten Stahlplatte ab. Aussagen über die unbekannten Wahrscheinlichkeiten p_i bei einem verfälschten Würfel zu machen, ist z.B. ein Problem der Statistik. Mit Hilfe einer auf den Axiomen von *Kolmogoroff* aufgebauten Theorie werden dort die entsprechenden Aussagen über die (zunächst unbekannten) Wahrscheinlichkeiten abgeleitet. ♦

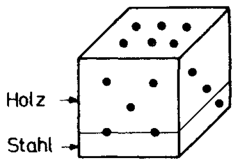

Bild 1.5
Verfälschter Würfel